

© Усков В.И., 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-172-181

УДК 517.928+517.956



Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Study of rigidity of a first-order algebro-differential system with perturbation in the right-hand side

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation

Аннотация. Исследуется жесткость динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с необратимым оператором при старшей производной. Система возмущена операторной добавкой порядка второй степени малого параметра. Определяются условия, при которых система робастна относительно этих возмущений и условия, при которых влияние возмущений значительно, для чего выводится уравнение ветвления. С помощью него устанавливается вид функций погранслоя. В качестве примера исследуется начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных со смешанной второй частной производной, встречающейся при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки и т. д.

Ключевые слова: жесткость, динамическая система, дифференциальное уравнение первого порядка, сингулярное возмущение, малый параметр, 0-нормальное собственное число, функция погранслоя, уравнение ветвления

Для цитирования: Усков В.И. Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 172–181. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-172-181.

Abstract. The rigidity of a dynamical system described by a first-order differential equation with an irreversible operator at the highest derivative is investigated. The system is perturbed by an operator addition of the order of the second power of a small parameter. Conditions under which the system is robust with respect to these disturbances are determined as well as conditions under which the influence of disturbances is significant. For this, the bifurcation equation is derived. It is used to set the type of boundary layer functions. As an example, we investigate the initial boundary value problem for a system of partial differential equations with a mixed second partial derivative which occurs in the study of the processes of sorption and desorption of gases, drying processes, etc.

Keywords: rigidity, dynamical system, first-order differential equation, singular perturbation, small parameter, 0-normal eigenvalue, boundary layer function, bifurcation equation

Mathematics Subject Classification: 34D05, 35A24, 35B20

For citation: Uskov V.I. Issledovaniye zhestkosti algebro-differentsial'noy sistemy pervogo poryadka s vozmushcheniyem v pravoy chasti [Study of rigidity of a first-order differential

system with perturbation in the right-hand side]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 172–181.
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-172-181. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается задача Коши для динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$A \frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t, \varepsilon), \quad (0.1)$$

$$u(t_0, \varepsilon) = u^0(\varepsilon), \quad (0.2)$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховом пространстве $E(\mathbb{R})$, $\overline{\text{dom}} A = E$, $\overline{\text{dom}} B = E$, $\overline{\text{dom}} C = E$, $\overline{\text{dom}} D = E$; $u(t, \varepsilon) \in E$ — искомая функция; $u^0(\varepsilon) \in E$ — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $t \in \mathfrak{T} = [t_0; t_{max}]$; $\varepsilon \in \mathcal{E} = (0; \varepsilon_0)$ — малый параметр.

Оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом (далее, 0-NEV-свойством).

Уравнение (0.1) с вырожденным оператором при старшей производной называется *алгебро-дифференциальным*. Динамическая система, описываемая этим уравнением, не является жесткой. Одним из важнейших свойств таких динамических систем является свойство чувствительности системы даже к незначительным возмущениям параметров.

Возмущениями, вызываемыми наличием малого параметра при операторных коэффициентах, занимались многие авторы: М. М. Вайнберг и В. А. Треногин (см. [1]), С. Г. Крейн (см. [2]) и С. П. Зубова и К. И. Чернышов (см. [3]). Жесткость динамической системы вида (0.1) с фредгольмовым оператором A , имеющим одномерное ядро, с более простой правой частью $(B + \varepsilon C)$ изучена в работе [4], а в работе [5] построено асимптотическое разложение решения по степеням параметра ε .

Возможно следующее поведение решения $u(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

а) Равномерная сходимость на \mathfrak{T} решения $u(t, \varepsilon)$ задачи Коши (0.1), (0.2) к решению $\bar{u}(t)$ предельной задачи Коши:

$$A \frac{d\bar{u}}{dt} = B\bar{u}(t),$$

$$\bar{u}(t_0) = \bar{u}^0.$$

Это означает, что система жесткая (робастна по отношению к возмущению $\varepsilon C + \varepsilon^2 D$), т. е. изменение параметра ε мало меняет само решение.

О п р е д е л е н и е 0.1. Ограниченная функция $v(t, \varepsilon)$ называется функцией погранслоя вблизи точки $t = t_0$, если $v(t, \varepsilon)$ равномерно (по норме в банаховом пространстве E) стремится к 0 на $[t'; t_{max}]$ при каждом $t' \in (t_0; t_{max})$ и не стремится равномерно к 0 на \mathfrak{T} .

Данное определение функции погранслоя обобщает определение, приведенное в работе [6] в случае $t_0 = 0$.

б) Явление погранслоя вблизи точки $t = t_0$:

$$u(t, \varepsilon) = \bar{u}(t) + v(t, \varepsilon),$$

где $v(t, \varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи $t = t_0$. Этот случай возникает, когда вблизи (в пограничном слое $(t_0; t')$) начальной точки решение сильно изменяется.

Остальные случаи:

c) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(t, \varepsilon)\| = \infty$ или

d) предел $u(t, \varepsilon)$ не существует.

Это критические случаи, когда малое изменение параметра приводит к такому сильному изменению решения в пограничном слое, что может разрушить систему.

Явление погранслоя имеет место при выполнении некоторых *условий регулярности вырождения*. В работе [7] в качестве примера исследуется динамическая модель Леонтьева выпуска валовой продукции. Невыполнение условий регулярности вырождения влечет за собой расхождение между планируемым объемом производства ($\varepsilon = 0$) и полученным на практике.

Цель данной работы — исследовать жесткость динамической системы (0.1), (0.2) и определить, при каких условиях на операторные коэффициенты уравнения имеют место случаи а)–д) поведения решения. Для этого в работе получено уравнение ветвления, позволяющее определить вид функций погранслоя.

В качестве примера рассматривается система уравнений в частных производных со старшей смешанной второй частной производной. Такие уравнения встречаются при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки и т. д. (см. [8]). Для ее исследования вводится матрично-дифференциальный оператор первого порядка. В работе [9] доказано, что он обладает 0-NEV-свойством. С применением этого свойства устанавливается, что при некоторых условиях на числовые коэффициенты система является жесткой.

1. Необходимые сведения

Пусть $A : E \rightarrow E$ — линейный оператор, обладающий 0-NEV-свойством. Это свойство влечет разложение $E = M \oplus N$, где N — корневое подпространство, элементов e_i , отвечающих нулевому собственному числу, а M — инвариантное подпространство и такое, что сужение \tilde{A} оператора A на M имеет ограниченный обратный \tilde{A}^{-1} (см. [10]).

Рассматривается частный случай оператора A , обладающего двумерным ядром ($n = 2$) без присоединенных элементов к элементам ядра, т. е. $N = \text{Ker } A$. В подпространстве N вводится скалярное произведение \langle, \rangle так, что

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Элемент ядра z раскладывается по базису e_1, e_2 :

$$z = c_1 e_1 + c_2 e_2. \quad (1.1)$$

Пусть P — проектор на N , Q — проектор на M . Вводится полуобратный оператор $H = \tilde{A}^{-1}Q : M \rightarrow M$.

Имеет место следующее утверждение, доказанное в работе [7].

Лемма 1.1. *Линейное уравнение*

$$Av = w, \quad v \in \text{dom } A, \quad w \in E,$$

равносильно системе

$$\begin{aligned} v &= Hw + z \quad \text{для любого } z \in \text{Ker } A, \\ \langle Pw, e_j \rangle &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Далее, вводится определитель-функция

$$F(x, y) = \det \begin{pmatrix} f_{11}(x, y) & f_{12}(x, y) \\ f_{21}(x, y) & f_{22}(x, y) \end{pmatrix},$$

где все функции f_{ij} достаточно гладкие. Обозначим

$$F_{i_1 i_2}(x, y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^{i_1+i_2} f_{11}}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} & \frac{\partial^{i_1+i_2} f_{12}}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} \\ \frac{\partial^{m-i_1+n-i_2} f_{21}}{\partial x^{m-i_1} \partial y^{n-i_2}} & \frac{\partial^{m-i_1+n-i_2} f_{22}}{\partial x^{m-i_1} \partial y^{n-i_2}} \end{pmatrix}, \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Имеет место следующее утверждение о дифференцировании определитель-функции.

Теорема 1.1. *Частная производная определитель-функции вычисляется по формуле*

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n} = \sum_{i_1, i_2=0}^{m, n} C_m^{i_1} C_n^{i_2} F_{i_1 i_2}(x, y).$$

Это утверждение достаточно очевидно доказывается методом математической индукции по m, n .

Далее, введем определитель-функцию

$$G(x, y) = \det \begin{pmatrix} g_{11}(x, y) & g_{12}(x, y) \\ g_{21}(x, y) & g_{22}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где g_{ij} — многочлены по степеням x, y с постоянными коэффициентами γ_{ij}^{rs} , т. е.

$$g_{ij}(x, y) = \sum_{r, s=0}^{\infty} \gamma_{ij}^{rs} x^r y^s.$$

Из теоремы 1.1 получаем следующее утверждение

Следствие 1.1. *Функция (1.2) является суммой ряда Маклорена*

$$G(x, y) = \sum_{r, s=0}^{\infty} G_{rs} x^r y^s$$

с коэффициентами

$$G_{rs} = \sum_{i_1, i_2=0}^{r, s} \det \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{i_1 i_2} & \gamma_{12}^{i_1 i_2} \\ \gamma_{21}^{r-i_1, s-i_2} & \gamma_{22}^{r-i_1, s-i_2} \end{pmatrix}.$$

2. Уравнение ветвления

Для вывода уравнения ветвления сделаем подстановку

$$u(t, \varepsilon) = \exp((t - t_0)/\lambda)v(\varepsilon)$$

в (0.1), где $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ — числа, достаточно малые по модулю, отличные от нуля, $v(\varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция и $v(\varepsilon) \neq 0$. Эта подстановка приводит к спектральному уравнению

$$Av(\varepsilon) = \lambda(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)v(\varepsilon).$$

В силу леммы 1.1 оно равносильно системе

$$(I - \lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D))v(\varepsilon) = z, \quad z \neq 0, \quad (2.1)$$

$$\langle P(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)v(\varepsilon), e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Пусть в дальнейшем выполнены следующие условия.

У с л о в и е 2.1. Операторы PB , PC , PD , HB , HC , HD ограничены.

У с л о в и е 2.2. Числа λ таковы, что при каждом $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполнено

$$0 < \|\lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\| < 1.$$

Тогда оператор $(I - \lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D))$ обратим; выразив $v(\varepsilon)$ из (2.1) и подставив в (2.2), получим систему

$$\langle R(\lambda, \varepsilon)z, e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.3)$$

где

$$R(\lambda, \varepsilon) = P(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)(I - \lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D))^{-1}.$$

Представив оператор $(H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D))^n$ в виде

$$(H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D))^n = \sum_{s=0}^{2n} \varepsilon^s H_s^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

запишем оператор $R(\lambda, \varepsilon)$ в виде ряда

$$R(\lambda, \varepsilon) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \lambda^j \varepsilon^i R_{ji}$$

в обозначениях

$$\begin{aligned} R_{00} &= PB, \quad R_{01} = PC, \quad R_{02} = PD, \quad R_{0j} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, \\ R_{j0} &= PBH_0^{(j)}, \quad R_{j1} = PBH_1^{(j)} + PCH_0^{(j)}, \\ R_{ji} &= PBH_i^{(j)} + PCH_{i-1}^{(j)} + PDH_{i-2}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad i = 2, 3, \dots, 2j, \\ R_{j,2j+1} &= PCH_{2j}^{(j)} + PDH_{2j-1}^{(j)}, \quad R_{j,2j+2} = PDH_{2j}^{(j)}, \\ R_{ji} &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad i = 2j + 3, 2j + 4, \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложения (1.1) для z в равенства (2.3) приводит к системе

$$c_1 \langle R(\lambda, \varepsilon)e_1, e_j \rangle + c_2 \langle R(\lambda, \varepsilon)e_2, e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2.$$

Определитель $\Delta = \Delta(\lambda, \varepsilon)$ этой системы равен 0, так как иное влечет равенства $c_1 = c_2 = 0$, а значит, $z = 0$, что противоречит (2.1). Таким образом, получаем уравнение

$$\Delta(\lambda, \varepsilon) = \det \begin{pmatrix} \langle R(\lambda, \varepsilon)e_1, e_1 \rangle & \langle R(\lambda, \varepsilon)e_2, e_1 \rangle \\ \langle R(\lambda, \varepsilon)e_1, e_2 \rangle & \langle R(\lambda, \varepsilon)e_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} = 0,$$

являющееся искомым уравнением ветвления. Разложив выражение $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ с применением следствия 1.1, перепишем это уравнение в виде:

$$\Delta(\lambda, \varepsilon) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Delta_{rs} \lambda^r \varepsilon^s = 0 \quad (2.4)$$

в обозначениях

$$\Delta_{rs} = \sum_{i_1, i_2=0}^{r,s} \det \begin{pmatrix} d_{11}^{i_1 i_2} & d_{12}^{i_1 i_2} \\ d_{21}^{r-i_1, s-i_2} & d_{22}^{r-i_1, s-i_2} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$d_{rs}^{ji} = \langle R_{ji} e_r, e_s \rangle. \quad (2.6)$$

3. Решение уравнения ветвления

Рассмотрим уравнение ветвления (2.4)–(2.6). Для его решения применяется диаграмма Ньютона (см. [11]). Возможны следующие случаи.

Случай 1. $\Delta_{00} \neq 0$.

В этом случае имеет место асимптотическое представление $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Delta(\lambda, \varepsilon) = \Delta_{00} + O(\varepsilon),$$

где $O(\varepsilon)$ вмещает в себя нормы ограниченных, в силу условия 2.1, операторов. Тогда диаграмма Ньютона вырождается в точку, что означает случай а) поведения решения.

Далее, пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 3.1. Справедливо неравенство

$$\Delta_{10} \neq 0.$$

Случай 2. Существует такое натуральное число s , что $\Delta_{0i} = 0$, $i = 0, 1, \dots, s-1$, $\Delta_{0s} \neq 0$.

В этом случае имеет место асимптотическое представление $\Delta(\lambda, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\Delta(\lambda, \varepsilon) = \varepsilon^s \Delta_{0s} + O(\varepsilon^{s+1}) + \lambda \Delta_{10} + o(\lambda).$$

В обозначении $\mu = \frac{\Delta_{0s}}{\Delta_{10}}$ по диаграмме Ньютона (см. рис. 1) решение уравнения ветвления равно $\lambda = -\mu \varepsilon^s$.

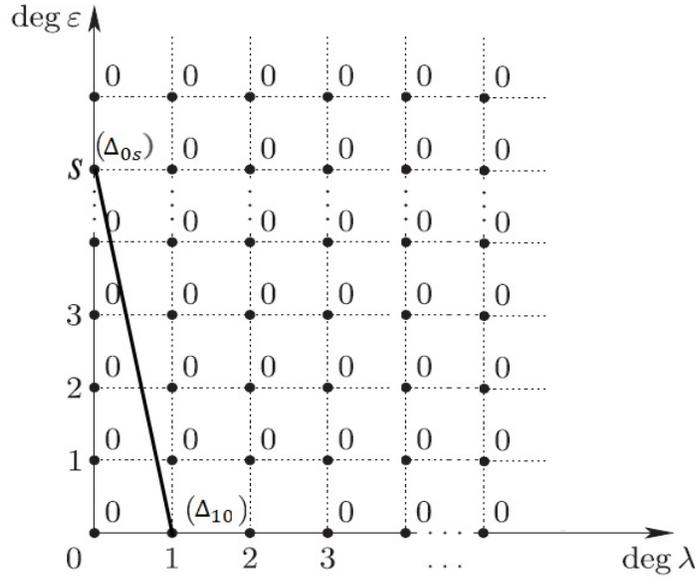


Рис. 1. Диаграмма Ньютона

Подстановка в (2.1) приводит к следующему результату о поведении решения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия 2.1, 2.2. Пусть $\Delta_{00} \neq 0$. Тогда имеет место случай а).

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия 2.1, 2.2, 3.1 и пусть существует такое натуральное число s , что $\Delta_{0i} = 0$, $i = 0, 1, \dots, s-1$, $\Delta_{0s} \neq 0$. Тогда:

1. Если $\mu > 0$, то выполнен случай б), и функции погранслоя имеют переменную $\tau = (t - t_0)/\varepsilon^s$.

2. Если $\mu < 0$, то имеет место случай в).

4. Пример

Исследуем жесткость динамической системы

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - a \frac{\partial u_2}{\partial t} &= b_{11} u_1 + b_{12} u_2 + \varepsilon c_{11} u_1 + \varepsilon c_{12} u_2 + \varepsilon^2 \delta_{11} u_1 + \varepsilon^2 \delta_{12} u_2, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial u_1}{\partial t} &= b_{21} u_1 + b_{22} u_2 + \varepsilon c_{21} u_1 + \varepsilon c_{22} u_2 + \varepsilon^2 \delta_{21} u_1 + \varepsilon^2 \delta_{22} u_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t_0, \varepsilon) &= g_1(x, \varepsilon), \quad u_2(x, t_0, \varepsilon) = g_2(x, \varepsilon), \\ u_1(0, t, \varepsilon) &= u_1(2\pi/a, t, \varepsilon), \quad u_2(0, t, \varepsilon) = u_2(2\pi/a, t, \varepsilon), \\ g_1(0, \varepsilon) &= g_1(2\pi/a, \varepsilon), \quad g_2(0, \varepsilon) = g_2(2\pi/a, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $a, b_{ij}, c_{ij}, \delta_{ij}$ — заданные вещественные постоянные, $a > 0$; $u_i = u_i(t, \varepsilon)$ — искомые достаточно гладкие функции, $g_i(x, \varepsilon)$ — голоморфные в окрестности точки $\varepsilon = 0$, $i, j = 1, 2$; $x \in \mathfrak{X}$; $t \in \mathfrak{T}$; $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Под решением задачи (4.1), (4.2) подразумеваются функции $u_i = u_i(x, t, \varepsilon)$ при каждом $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$:

1) непрерывно дифференцируемые по x при каждом $t \in \mathfrak{T}$ и непрерывно дифференцируемые по t при каждом $x \in \mathfrak{X}$;

2) удовлетворяющие условию $\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} \equiv \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x}$ при каждом $x, t \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$;

3) удовлетворяющие (4.1), (4.2) при каждом $x, t \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$.

Для исследования этой задачи введем оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -a \\ a & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$\text{dom } \mathcal{A} = \left\{ u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} : u_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}), u_i(0) = u_i(2\pi/a), i = 1, 2 \right\},$$

действующий в банаховом пространстве

$$E = \left\{ u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} : u_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}), i = 1, 2 \right\}.$$

Для этого оператора построим подпространство $N = \text{Ker } \mathcal{A} = \{c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x)\}$,

$e_1(x) = \begin{pmatrix} \cos ax \\ -\sin ax \end{pmatrix}$, $e_2(x) = \begin{pmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{pmatrix}$, и определим проектор на N формулой

$$\mathcal{P} = \frac{a}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi/a} (\cdot) \cos(a(x-s)) ds & \int_0^{2\pi/a} (\cdot) \sin(a(x-s)) ds \\ -\int_0^{2\pi/a} (\cdot) \sin(a(x-s)) ds & \int_0^{2\pi/a} (\cdot) \cos(a(x-s)) ds \end{pmatrix}.$$

Тогда полуобратный оператор запишется в виде

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{ij}), \quad i, j = 1, 2,$$

$$\mathcal{H}_{11} = -\int_x^{2\pi/a} (\cdot) \cos(a(x-s)) ds + \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi/a} (\cdot) s \cos(a(x-s)) ds,$$

$$\mathcal{H}_{12} = -\int_x^{2\pi/a} (\cdot) \sin(a(x-s)) ds + \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi/a} (\cdot) s \sin(a(x-s)) ds,$$

$$\mathcal{H}_{21} = -\mathcal{H}_{12}, \quad \mathcal{H}_{22} = \mathcal{H}_{11}.$$

Задача (4.1), (4.2) сводится к задаче вида (0.1), (0.2) с операторами $A = \mathcal{A}$, $B = (b_{ij})$,

$C = (c_{ij})$, $D = (\delta_{ij})$, $i, j = 1, 2$, искомой вектор-функцией $u(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x, t, \varepsilon) \\ u_2(x, t, \varepsilon) \end{pmatrix}$,

начальной вектор-функцией $u^0(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} g_1(x, \varepsilon) \\ g_2(x, \varepsilon) \end{pmatrix}$.

Пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 4.1. Имеет место неравенство $b_{12} \neq b_{21}$ и выполнено хотя бы одно из неравенств: $b_{11} \neq b_{22}$ или $b_{12} \neq -b_{21}$.

Вычисления по формулам (2.5), (2.6) показывают, что

$$\begin{aligned}\Delta_{00} &= \frac{(b_{11} + b_{22})^2 + (b_{21} - b_{12})^2}{4}, \\ \Delta_{01} &= \frac{(b_{11} + b_{22})(c_{11} + c_{22}) + (b_{21} - b_{12})(c_{21} - c_{12})}{2}, \\ \Delta_{02} &= \frac{(c_{11} + c_{22})^2 + (c_{21} - c_{12})^2}{4} + \frac{(b_{11} + b_{22})(\delta_{11} + \delta_{22}) + (b_{21} - b_{12})(b_{21} - b_{12})}{2}, \\ \Delta_{10} &= \frac{(b_{21} - b_{12})((b_{11} - b_{22})^2 + (b_{12} + b_{21})^2)}{8a}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия 4.1 имеем $\Delta_{00} \neq 0$ и $\Delta_{10} \neq 0$. Поскольку все операторы в условии 2.1 ограничены (P, H ограничены как интегральные, B, C, D — как числовые), и выполнены условия 2.2, 3.1, то теорема 3.1 влечет результат: *динамическая система (4.1), (4.2) жесткая.*

References

- [1] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969. [M. M. Wajnberg, V. A. Trenogin, *Teoriya Vetvleniya Reshenij Nelinejnyh Uravnenij*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].
- [2] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krejn, *Linejnye Differencial'nye Uravneniya v Banahovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [3] С. П. Зубова, К. И. Чернышов, “О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовским оператором при производной”, *Дифференциальные уравнения и их применение*, 1976, № 14, 21–39. [S. P. Zubova, K. I. Chernyshov, “On a linear differential equation with a Fredholm operator at the derivative”, *Differential Equations and Their Applications*, 1976, № 14, 21–39 (In Russian)].
- [4] С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, “Исследование жесткости дескрипторной динамической системы в банаховом пространстве”, *Проблемы математического анализа*, 2015, № 79, 127–132; англ. пер.: S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, “A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **208**:1 (2015), 119–124.
- [5] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай”, *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.: S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case”, *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.
- [6] С. П. Зубова, “О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной”, *Доклады Академии наук*, **454**:4 (2014), 383–386; англ. пер.: S. P. Zubova, “The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative”, *Doklady Mathematics*, **89** (2014), 72–75.
- [7] В. И. Усков, “Явление погранслоя в дескрипторном уравнении первого порядка с малым параметром в правой части”, *Проблемы математического анализа*, 2020, № 104, 157–162; англ. пер.: V. I. Uskov, “Boundary layer phenomenon for a first order descriptor equation with small parameter on the right-hand side”, *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **250**:1 (2020), 175–181.
- [8] А. Н. Тихонов, А. А. Жуховицкий, Я. Л. Забежинский, “Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала”, *Журнал физической химии*, **20**:10 (1946), 1113–1126. [A. N. Tikhonov, A. A. Zhukhovitsky, Ya. L. Zabezhinsky, “Absorption of gas from air flow by a layer of granular material”, *Journal of Physical Chemistry*, **20**:10 (1946), 1113–1126 (In Russian)].

- [9] С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, В. И. Усков, “Свойства вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора и их применение”, *Проблемы математического анализа*, 2021, № 109, 97–108; англ. пер.: S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, V. I. Uskov, “Degeneracy property of a matrix-differential operator and applications”, *Journal of Mathematical Sciences*, **255**:5 (2021), 640–652.
- [10] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965. [I. S. Gohberg, M. G. Krejn, *Vvedenie v Teoriyu Linejnyh Nesamosopryazhennyh Operatorov*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].
- [11] Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций*, Либроком, М., 2009. [N. G. Chebotarev, *Teoriya Algebraicheskikh Funktsiy*, Librokom Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3542-9662>

Поступила в редакцию 26.03.2021 г.
Поступила после рецензирования 17.05.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3542-9662>

Received 26.03.2021
Reviewed 17.05.2021
Accepted for press 10.06.2021